



Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Année universitaire 2011-2012
Semestre 4

Contrôle Analyse Numérique (Durée 1H30)

La présentation, la lisibilité, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies.

Bon courage

Exercice 1

1. Ecrire la méthode de quadrature du point milieu élémentaire pour l'intégrale $I = \int_0^1 e^{-t^2} dt$.
2. Donner une estimation de l'erreur de quadrature pour cette méthode.
3. Ecrire la méthode de quadrature du point milieu composite pour l'intégrale I .
En déduire une valeur du pas h de la subdivision choisie pour avoir une précision de 10^{-9} près de I .

Exercice 2

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 telle que $f(a) < 0 < f(b)$ et $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[a, b]$ qu'on désignera par α .

On pose dans toute la suite

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad x \in [a, b].$$

- (a) Calculer $\varphi(\alpha)$ et $\varphi'(\alpha)$ et montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $[\alpha - r, \alpha + r] \subset [a, b]$ et $|\varphi'(x)| < 1$ pour tout $x \in [\alpha - r, \alpha + r]$.

On choisit $x_0 \in [\alpha - r, \alpha + r]$ quelconque et on pose $x_{p+1} = \varphi(x_p)$

- (b) Montrer que $x_p \in [\alpha - r, \alpha + r]$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

- (c) En écrivant la formule de Taylor à l'ordre 2 pour φ entre x_p et α montrer qu'il existe $M > 0$ tel que

$$|x_{p+1} - \alpha| \leq M |x_p - \alpha|^2, \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

En déduire que

$$|x_p - \alpha| \leq \frac{1}{M} (M |x_0 - \alpha|)^{2^p}, \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

2. Application:

En utilisant ce qui précède, donner une valeur de $p \in \mathbb{N}$ pour laquelle on ait $|x_p - \alpha| \leq 10^{-9}$ où α est la solution de l'équation

$$e^{-x^2} = x$$

sur l'intervalle $[0, 1]$. (NB: On précisera une valeur de M et x_0 dans ce cas.)